Решения заданий первого этапа
Всесибирской олимпиады школьников по математике
10 класс

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

10.1. Найти все решения в неотрицательных действительных числах системы уравнений $a(a+b)=b(b+c)=c(c+a)$.

Ответ. Все тройки равных чисел (a,a,a) для произвольного неотрицательного a.

Решение. 1) Тройки чисел (a,a,a) при любом a, очевидно, являются решениями системы из условия.
2) Если ровно одно из переменных равно 0, например $a=0, b\neq 0, c\neq 0$, то и $c+a=0$, откуда и $c=0$ - противоречие. Если ровно два из переменных равны 0, например $a=0, b=0, c\neq 0$, то и $c^2=0$, откуда и $c=0$ - снова противоречие.
3) Если все числа не равны нулю и среди них есть два равных, например $a=b$, то из первого равенства $a+b=b+c$, откуда и $a=c$ - все три числа равны.
4) Далее считаем все числа положительными и различными. В таком случае произведение суммы двух меньших из них на одно из этих меньших, будет меньше произведения двух больших из них на одно из больших. Следовательно, рассматриваемые тройки не являются решениями системы из условия.

Критерии оценивания. (●) Замечено, что все тройки равных чисел (a,a,a) являются решениями: 1 балл. (●) Разбор случая 2): 2 балла, (●) Разбор случая 3): 1 балл. (●) Разбор случая 4): 3 балла.

10.2. Пусть *A* — множество из десяти различных положительных чисел (не обязательно натуральных). Определить максимально возможное количество арифметических прогрессий, состоящих из трёх различных чисел множества *A*.
Ответ. 20.
Решение. Обозначим элементы множества *A* за $a_1<a_2<\ldots<a_{10}$. Три числа $a_k<a_l<a_m$ образуют трёхчленную арифметическую прогрессию тогда и только тогда $a_l-a_k=a_m-a_l$. Посмотрим, какое максимальное количество раз каждый из элементов *A* может быть средним членом a_l такой прогрессии. Несложно видеть, что к элементу $a_l, l=2,3,4,5$ можно подобрать первый элемент a_k не более, чем $l-1$ различными способами – это может быть только $a_1,a_2,\ldots,a_{l-1}$. Следовательно, искомых прогрессий со средним членом $a_l, l=2,3,4,5$ может быть не более 1+2+3+4=10. Аналогично, к элементу $a_l, l=6,7,8,9$ можно подобрать третий элемент a_m не более, чем $10-l$ различными способами - это может быть только $a_{l+1},a_{l+2},\ldots,a_{10}$. Следовательно, искомых прогрессий со средним членом $a_l, l=6,7,8,9$ может быть не более 4+3+2+1=10. Любая искомая трёхчленная прогрессия должна быть одного из этих двух типов, следовательно, общее число таких способов не может превосходить 1+2+3+4+4+3+2+1=20.
В качестве примера множества *A* из 10 элементов, когда значение 20 достигается, можно взять множество всех натуральных чисел от 1 до 10 включительно.
Критерии оценивания. (●) Доказано, что число прогрессий не больше 20: 5 баллов. (●) Пример с 20 прогрессиями: 2 балла.

10.3. Дана окружность Ω с центром O и окружность Ω', которая проходит через O и пересекает Ω в точках A и B. На окружности Ω' выберем точку C, отличную от O, лежащую внутри Ω. Прямая AC ещё раз пересекает окружность Ω в точке D, а прямая BC ещё раз пересекает окружность Ω в точке E. Докажите, что треугольники ABC и CDE равны.

Доказательство. Углы ACB и DCE равны как вертикальные, поэтому для равенства треугольников ABC и CDE достаточно равенства отрезков CB=CD и CA=CE. Докажем первое из них. Обозначим величину угла AOB за x. Тогда и величина BCA, вписанного в окружность Ω' и опирающегося там на хорду AB тоже равна x, а величина смежного с ним угла BCD равна $180-x$. С другой стороны, вписанный в окружность Ω угол ADB равен половине её центрального угла AOB, то есть $\frac{x}{2}$. В таком случае в треугольнике BCD углы BCD и CDB равны 180^0-x и $\frac{x}{2}$ соответственно, следовательно, третий угол CBD тоже равен $\frac{x}{2}$, поэтому треугольник BCD является равнобедренным и CB=CD, что и требовалось доказать. Равенство CA=CE доказывается аналогично.

Критерии оценивания. (●) Доказано, что CB=CD или CA=CE: по 3 балла за каждое равенство. **.** (●) Замечание, что для равенства треугольников ABC и CDE достаточно равенства CB=CD и CA=CE: 1 балл.

10.4. Рассмотрим все 7! семизначных чисел, получающихся из числа 1234567 всевозможными перестановками цифр. Сколько из них дают остаток 5 при делении на 7?

Ответ. 6!.

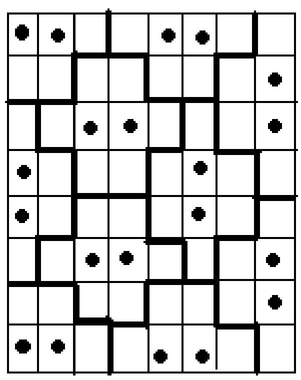
Решение. Обозначим за $A_n, n=0,1,...,6$ множества тех из рассматриваемых чисел, которые при делении на 7 дают остатки 0,1,2,…6 соответственно. Докажем, что каждое из этих множеств содержит одинаково количество чисел, равное 7!/7=6!. Заметим, что число 1111111 при делении на 7 даёт остаток 1. С каждым из рассматриваемых чисел a проделаем следующее: прибавим к каждой цифре a единицу, если при этом в некотором разряде получается цифра 8, заменим её на цифру на 1, дающую тот же остаток от деления на 7. Остаток от деления полученного числа на 7 равен остатку от деления на 7 числа $a+1111111$, то есть на 1 больше, чем остаток от деления на 7 числа a. Следовательно, данное отображение однозначно переводит каждое число множества A_n в некоторое число множества A_{n+1}, для всех $n=0,1,...,6$, причём разные числа из A_n переходят в разные числа из A_{n+1}. Значит, количество чисел в A_1 не меньше, чем в A_0, количество чисел в A_2 не меньше, чем в A_1, и так далее,…. количество чисел в A_0 не меньше, чем в A_6, поэтому все множества $A_n, n=0,1,...,6$ содержат одинаковое количество чисел, равное 7!/7=6!.

Критерии оценивания. (●) Идея прибавления 1 во всех разрядах: 2 балла. **.** (●) Доказательство, что такая операция переводит множества $A_n, n=0,1,...,6$ друг в друга: 3 балла. **.** (●) Доказательство равномощности этих множеств: 2 балла.

10.5. Сколько клеток нужно отметить на клетчатой доске 8 на 8 так, чтобы каждая клетка доски, включая отмеченные, была соседней по стороне с некоторой отмеченной клеткой? Найдите все возможные ответы. Считаем, что клетка не является соседней сама с собой.

Ответ. 20.

Решение. Сначала соберёмся с силами и отметим на доске 8 на 8 двадцать клеток, как того требует условие. Например, так, как это показано на рисунке. При этом доска естественным образом разбивается на 10 частей, как это показано жирными линиями на рисунке. Каждая часть состоит из клеток, соседних с данной парой отмеченных.



Теперь, используя построенный пример, докажем, что единственным ответом задачи являются именно 20 клеток. Рассмотрим разбиение доски на 10 частей, указанных в примере. Дальше везде будем называть *фигурами* именно эти части данного примера.. Назовём *центральными* клетками каждой фигуры те, что отмечены в примере на рисунке. Вспомним, что шахматная доска имеет естественную раскраску клеток в шахматном порядке и рассмотрим в каждой фигуре её чёрную и белую части, состоящие из чёрных и белых клеток этой фигуры соответственно. Заметим, что белая центральная клетка фигуры соседствует только с чёрными клетками только этой фигуры, причём со всеми, и чёрная центральная клетка фигуры соседствует только с белыми клетками только этой фигуры, причём со всеми.
Рассмотрим теперь произвольную разметку клеток на доске, удовлетворяющую условию задачи, и докажем, что каждая фигура содержит ровно две отмеченные клетки, откуда будет следовать ответ задачи. Действительно, если некоторая фигура содержит не меньше трёх отмеченных клеток, то она содержит не меньше двух белых отмеченных, либо не меньше двух чёрных отмеченных, тогда центральная клетка противоположного цвета этой фигуры будет соседней не менее, чем с двумя отмеченными, что противоречит условию. А если некоторая фигура содержит не больше одной отмеченной клетки, то в ней либо не будет белых отмеченных клеток, либо не будет чёрных отмеченных клеток, тогда центральная клетка противоположного цвета этой фигуры вообще не будет соседней ни с какой отмеченной клеткой, что тоже противоречит условию. Следовательно, каждая фигура содержит по две отмеченных клетки, поэтому любой пример содержит ровно 20 отмеченных клеток.
Заметим, что построенный в данном решении пример не единственный, и мы доказывали совсем не то, что отмеченные клетки любого примера совпадают с отмеченными нами. Можно повернуть доску на 90 градусов и получится новый пример, отличный от рассмотренного, но всё равно, любая фигура содержит по две отмеченных клетки из нового примера.
Замечание. Оценку для 20 можно делать и по-другому, доказав сначала, что число крайних отмеченных клеток не меньше 9 и т.д. Это длинный и опасный путь с перебором частных случаев. При оценивании заявленных решений такого типа нужно очень тщательно оценивать в них каждый шаг, и, если такое решение содержит нерассмотренные случаи или проколы в подсчётах, то оценочная часть решения оценивается не выше, чем в 1 балл.
Критерии оценивания. (●) Построен пример на 20 клеток: 3 балла. (●) Доказано, что число отмеченных клеток всегда равно 20: 4 балла. (●) Идея рассмотрения фигур из решения на доске для оценивания (без особых продвижений): 1 балл.